Minimum Spanning Tree: Prim's Algorithm

1. Initialize a tree with a single vertex, chosen arbitrarily from the graph.

2. Grow the tree by one edge: of the edges that connect the tree to vertices not yet in the tree, find the minimum-weight edge, and transfer it to the tree.

3. Repeat step 2 (until all vertices are in the tree).

Complexity Analysis

Minimum edge weight data structure	Time complexity (total)
adjacency matrix, searching	O(V*V)
binary heap and adjacency list	O((V + E) log(V)) = O(E log(V))
Fibonacci heap and adjacency list	O(E + V log(V))

Parallel Formulation

Prim's Algorithm for Finding the Minimum Spanning Tree

```
1.  Initialize S with the start vertex, s, and V–S with the remaining vertices.
2.  for all v in V–S
3.        Set p[v] to s.
4.        if there is an edge (s, v)
5.              Set d[v] to w(s, v).
          else
6.              Set d[v] to ∞.
7.  while V–S is not empty
8.        for all u in V–S, find the smallest d[u].
9.        Remove u from V–S and add it to S.
10.       Insert the edge (u, p[u]) into the spanning tree.
11.       for all v in V–S
12.             if w(u, v) < d[v]
13.                   Set d[v] to w(u, v).
14.                   Set p[v] to u.
```

Δύσκολα παραλληλοποιείται (δεν μπορούμε να βάλουμε δύο κορυφές ταυτόχρονα στο MST)

Parallel Formulation

Prim's Algorithm for Finding the Minimum Spanning Tree

```
1.  Initialize S with the start vertex, s, and V–S with the remaining vertices.
2.  for all v in V–S
3.        Set p[v] to s.
4.        if there is an edge (s, v)
5.              Set d[v] to w(s, v).
          else
6.              Set d[v] to ∞.
7.  while V–S is not empty
8.        for all u in V–S, find the smallest d[u].
9.        Remove u from V–S and add it to S.
10.       Insert the edge (u, p[u]) into the spanning tree.
11.       for all v in V–S
12.             if w(u, v) < d[v]
13.                   Set d[v] to w(u, v).
14.                   Set p[v] to u.
```

Εύκολη παραλληλοποίηση!

P = ο αριθμός των διεργασιών

N = ο αριθμός των κόμβων του γράφου

Vi = το σύνολο των κόμβων που ανατίθενται στην διεργασία Pi , Pi = 0 , … , P-1

Ιδέα: κάθε διεργασία θα υπολογίζει παράλληλα τα

$$di[u] = min\{di[v] | v \in (V - V_T) \cap Vi\}$$

Το ολικό ελάχιστο βρίσκεται με reduction πάνω σε μερικά ελάχιστα

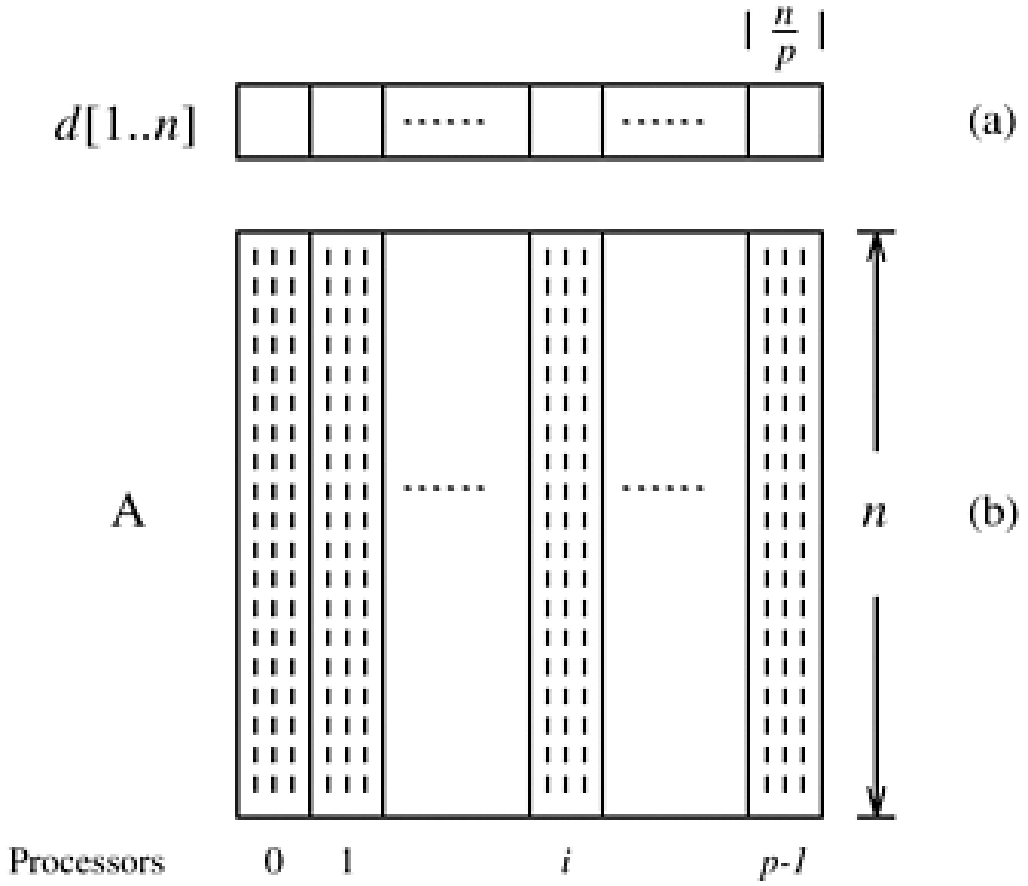
Σε κάθε βήμα η βασική διεργασία P0 θα έχει το αποτέλεσμα του reduce operation, δηλαδή ποιος κόμβος θα προστεθέι στο δέντρο.

Η διεργασία P0 θα κάνει Broadcast σε όλους το ποιος κόμβος προστέθηκε .

Κάθε διεργασία ανανεώνει σε κάθε επανάληψη τις τιμές για τις αποστάσεις από το νέο MST για τους κόμβους που της αντιστοιχούν .

Διαμοιρασμός του πίνακα γειτνίασης και του πίνακα αποστάσεων σε 1D blocks.

Γιατί ;;



Run time formulation
Computation cost

- Σε κάθε βήμα το update των τιμών του πίνακα αποστάσεων σε κάθε διεργασία είναι Θ(n/p) , αφού κάθε διεργασία έχει αναλάβει n/p κόμβους και το update με adjacencny matrix είναι O(1)
- Ο υπολογισμός του ελάχιστου πάνω στους p κόμβους είναι πάλι για κάθε διεργασία Θ(n/p)
- Για τις n επαναλήψεις
  computation cost= Θ(n* n/p)

Communication cost για υλοποίηση σε αρχιτεκτονική κατανεμημένης μνήμης

Σε κάθε επανάληψη έχουμε

- all-to-one-reduction για υπολογισμό της ελάχιστης ακμής προς εισαγωγή (Θ(log p))
- one-to-all broadcast για την γνωστοποίηση σε όλους της ακμής που τελικά εισάχθηκε στο MST (Θ(log p))

Κόστος: Θ(N log p) για τις N επαναλήψεις

Speedup and Efficiency

$$S = \frac{\Theta(n^2)}{\Theta(n^2/p) + \Theta(n \log p)}$$

$$E = \frac{1}{1 + \Theta((p \log p)/n)}$$

MPI: Message Passing Interface

- Όλες οι διεργασίες εκτελούν το ίδιο πρόγραμμα

- Κάθε διεργασία επεξεργάζεται υποσύνολο των δεδομένων ή διαφοροποιεί τη ροή εκτέλεσης της με βάση το βαθμό (rank) που της αποδίδει το MPI

Συλλογική Επικοινωνία στο MPI

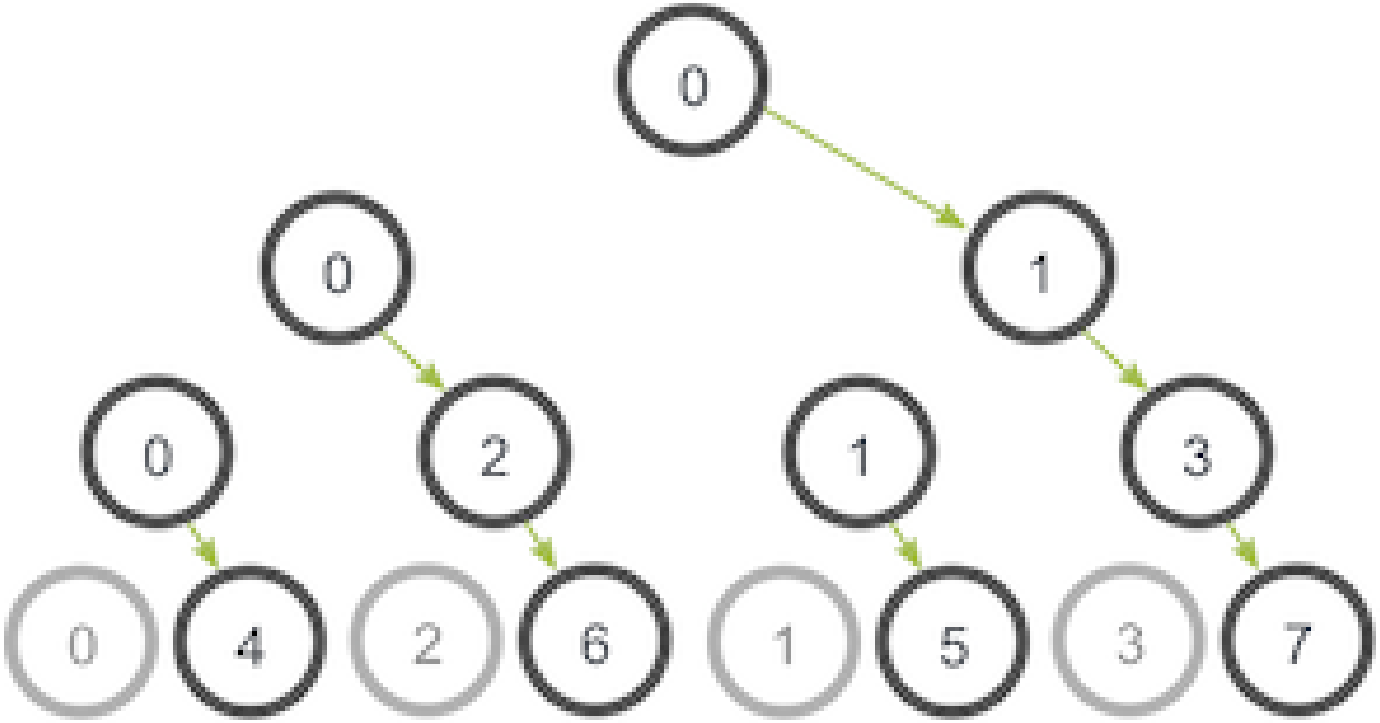
Παράδειγμα:

Αποστολή του msg στις διεργασίες 1-7 από τη 0

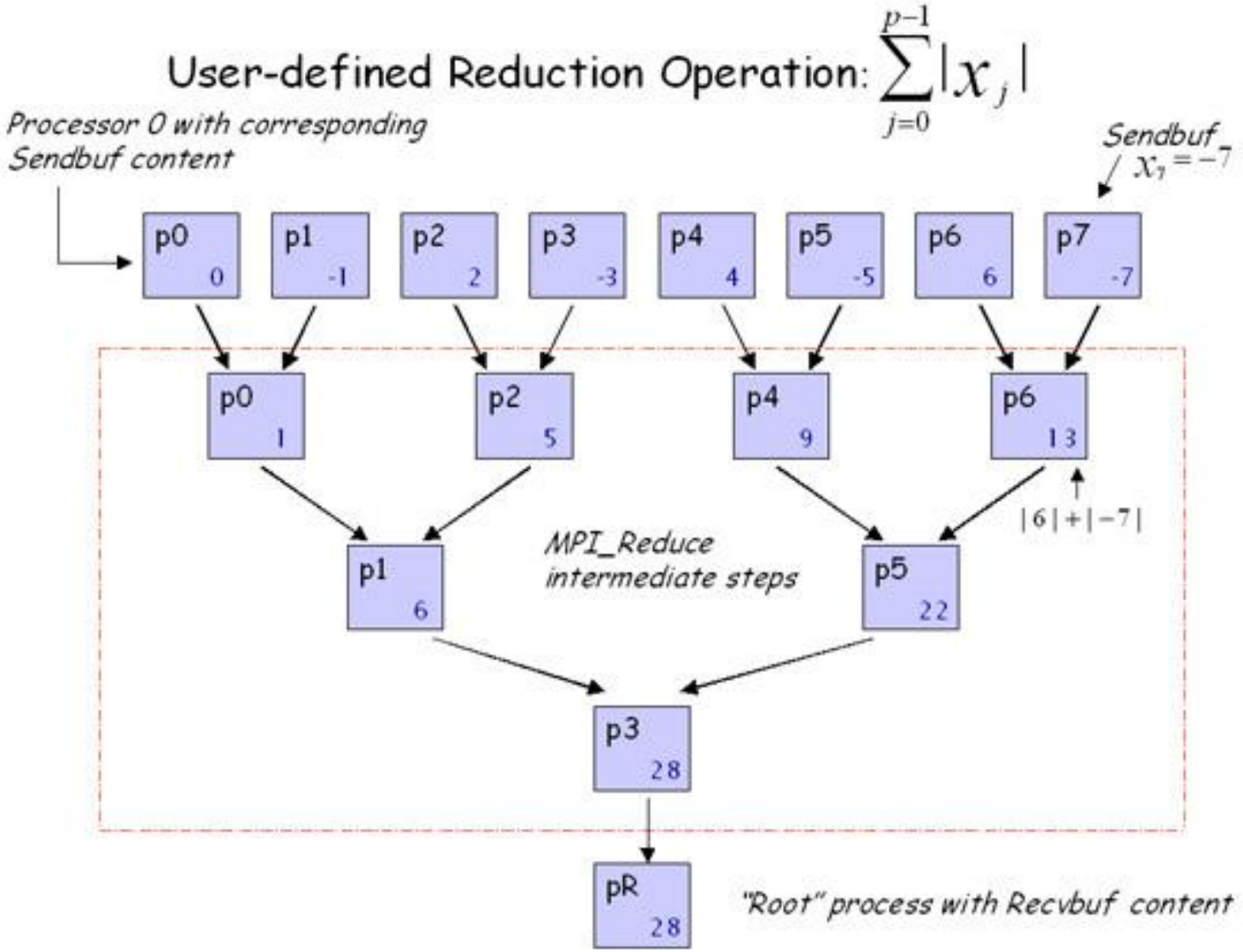
MPI_Bcast(msg,count,MPI_FLOAT,0,MPI_COMM_WORLD);

Γενικά: Για p διεργασίες έχουμε log 2 p βήματα επικοινωνίας

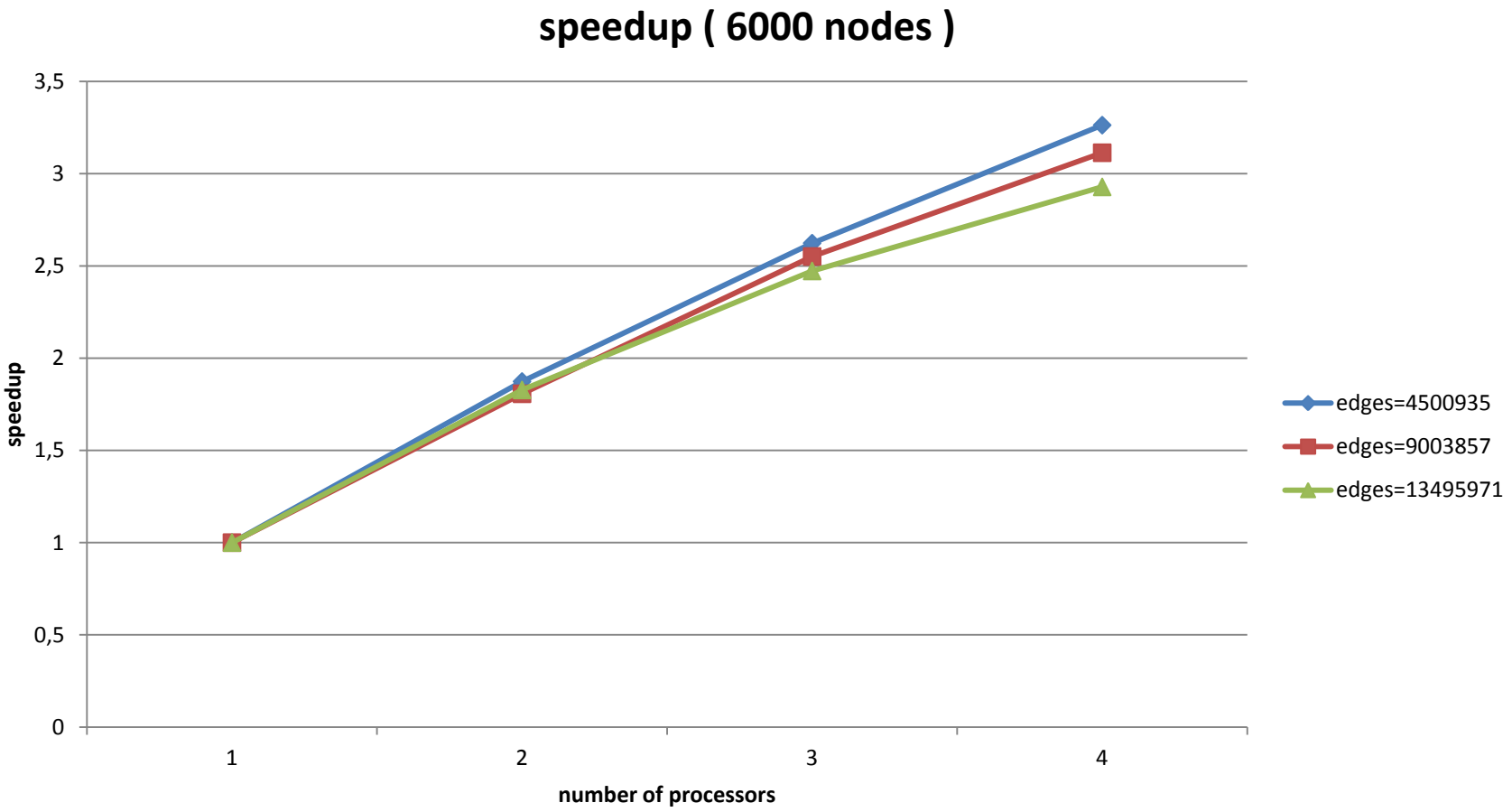
Broadcast communication tree



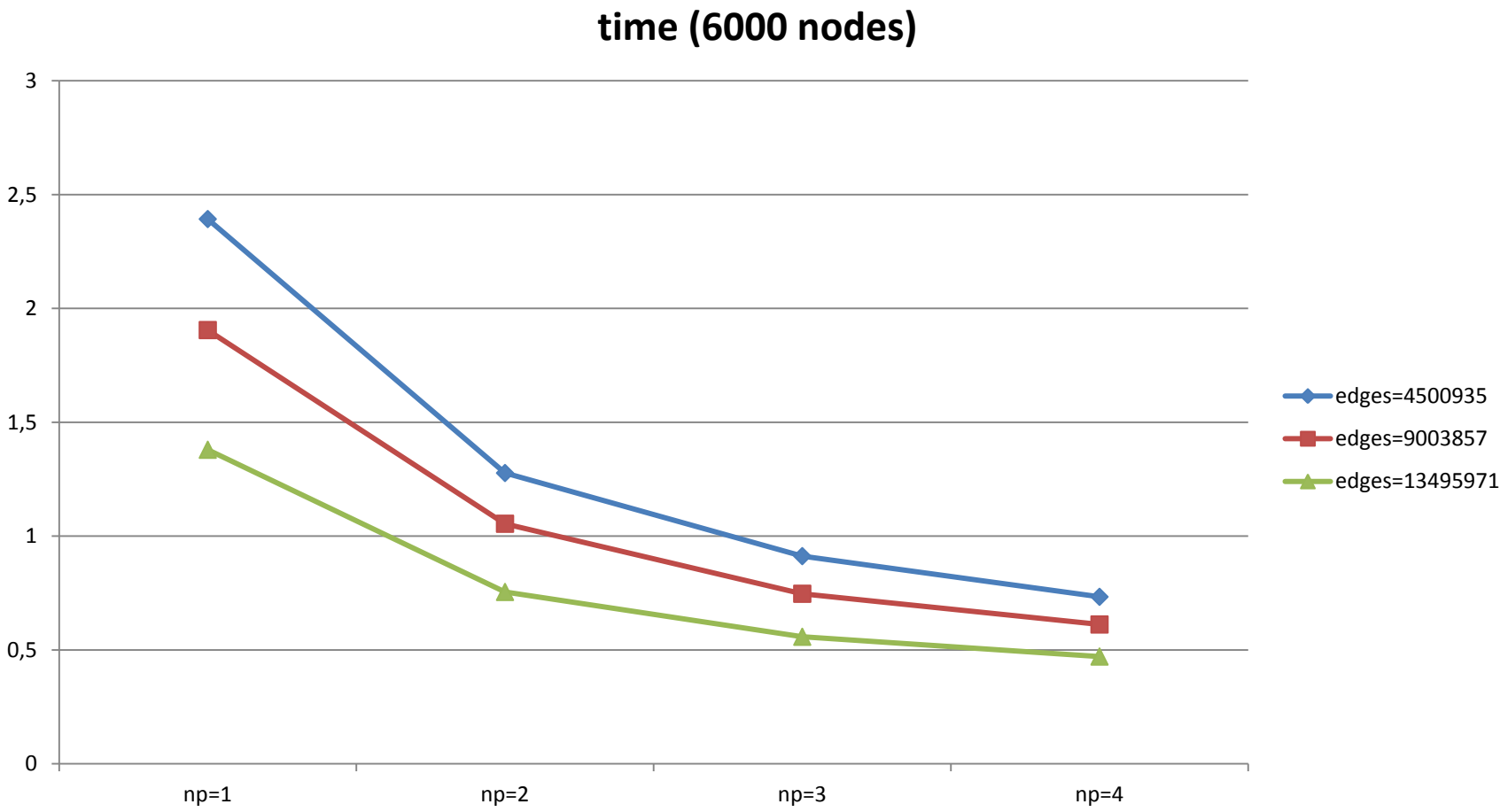
Reduce communication tree



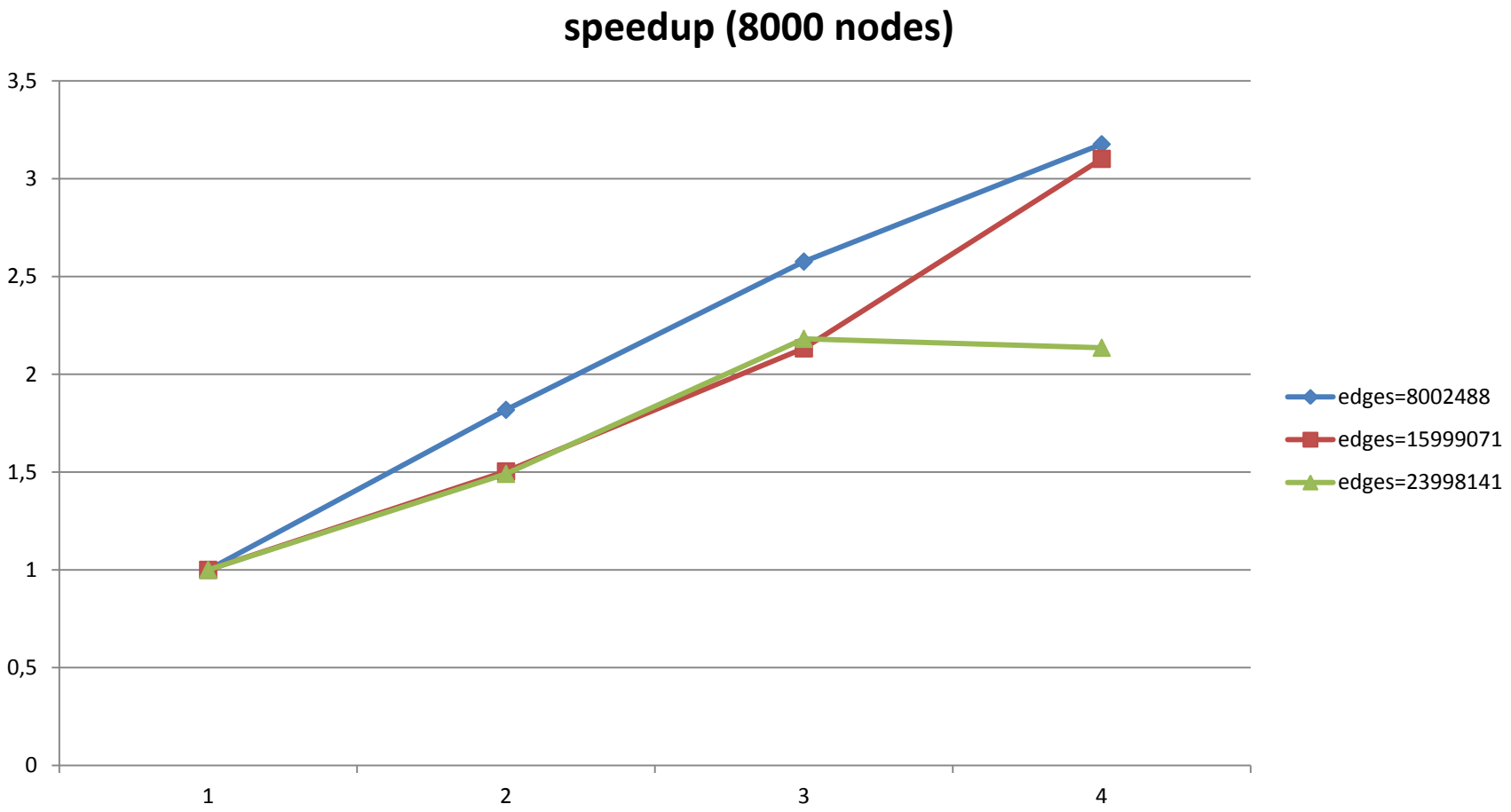
Αποτελέσματα



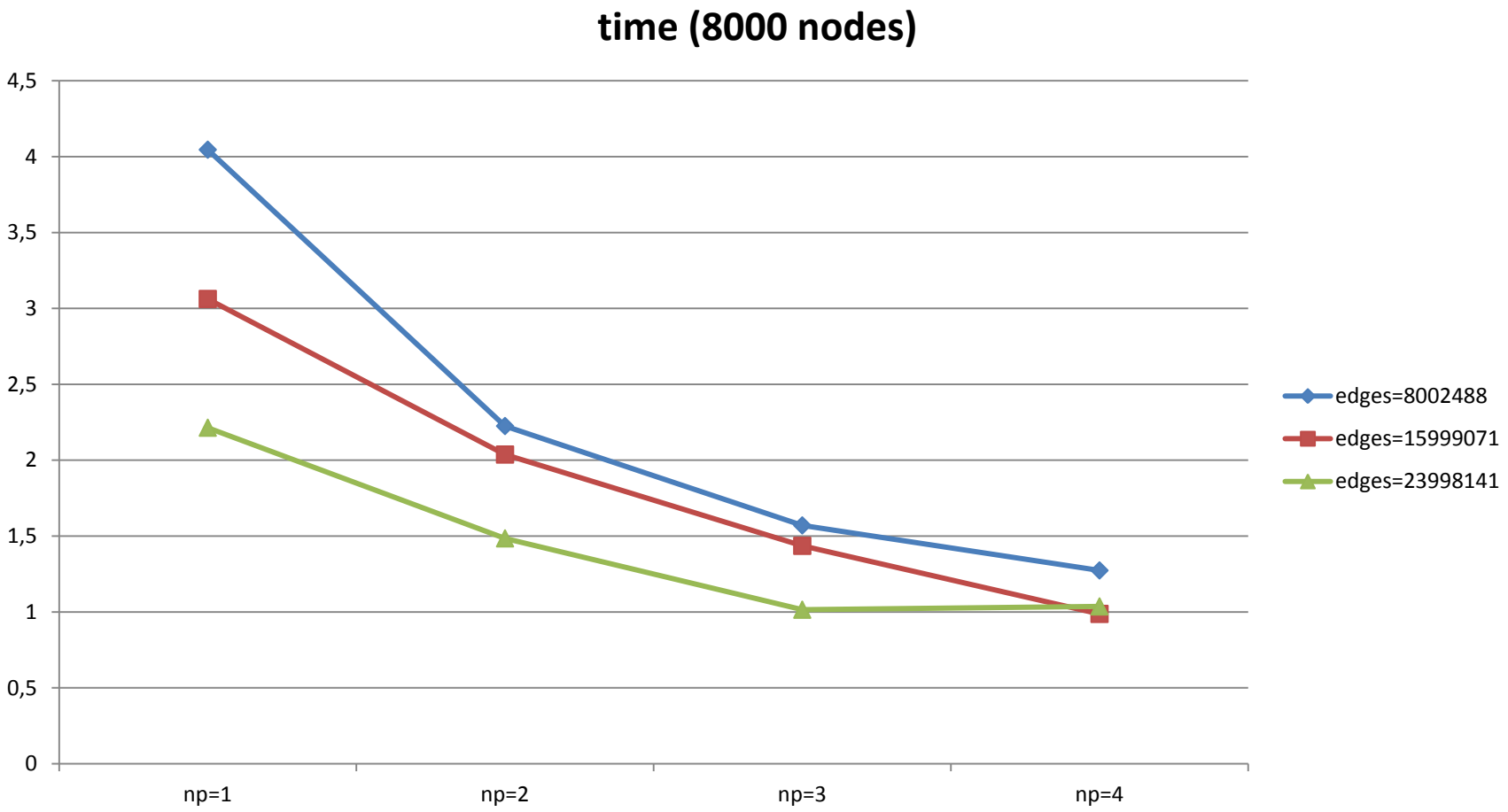
Αποτελέσματα



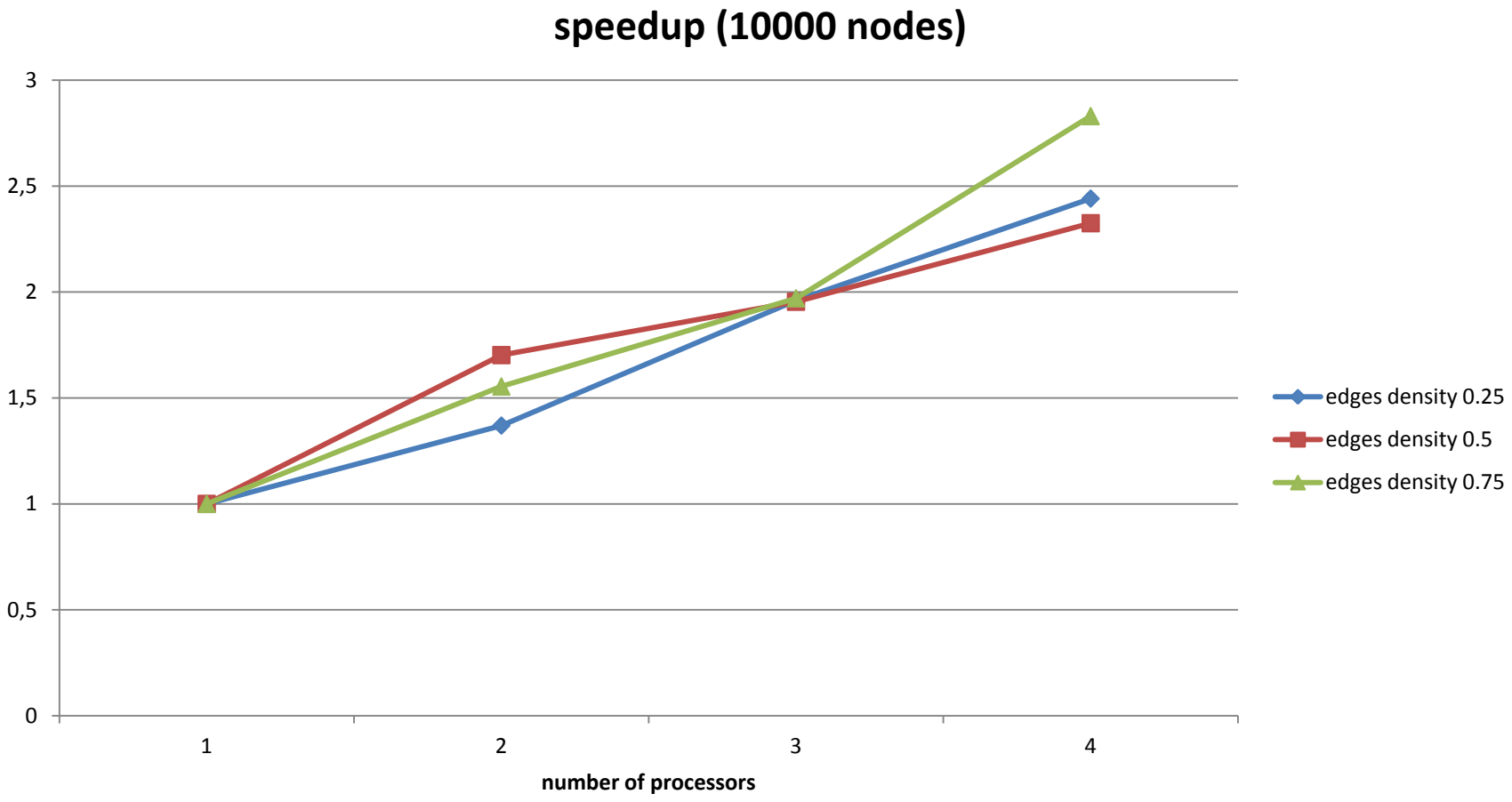
Αποτελέσματα



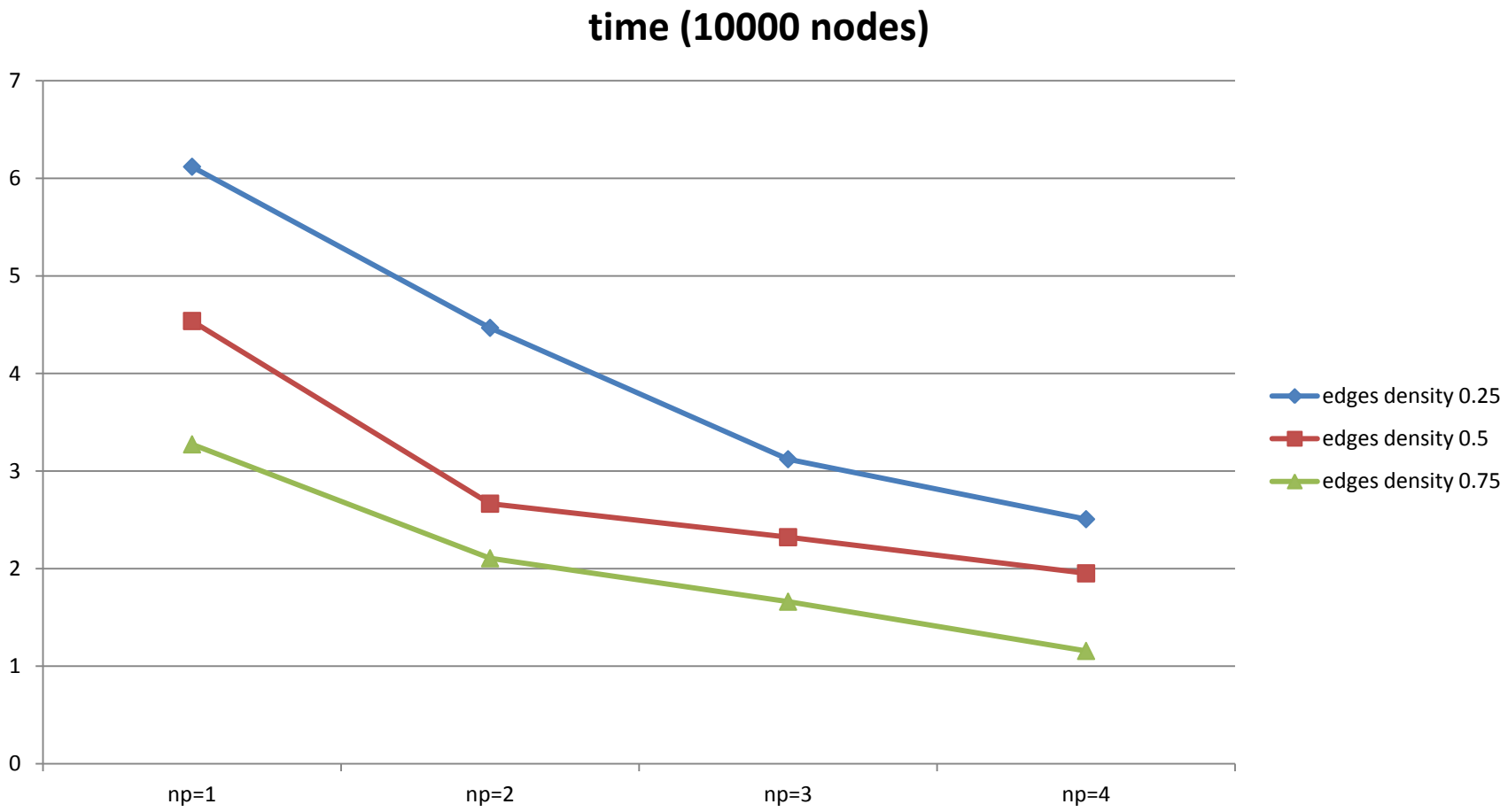
Αποτελέσματα



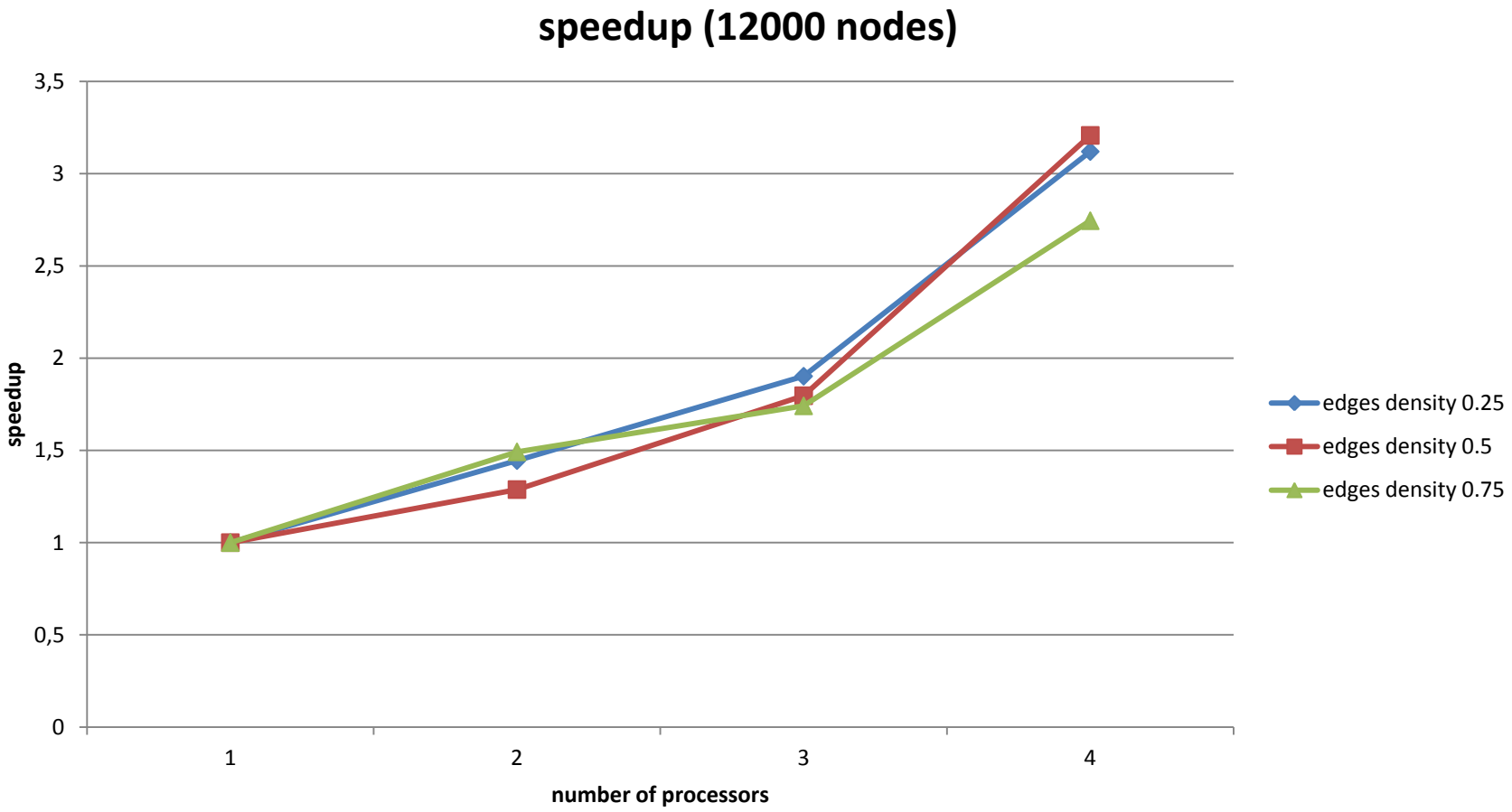
Αποτελέσματα



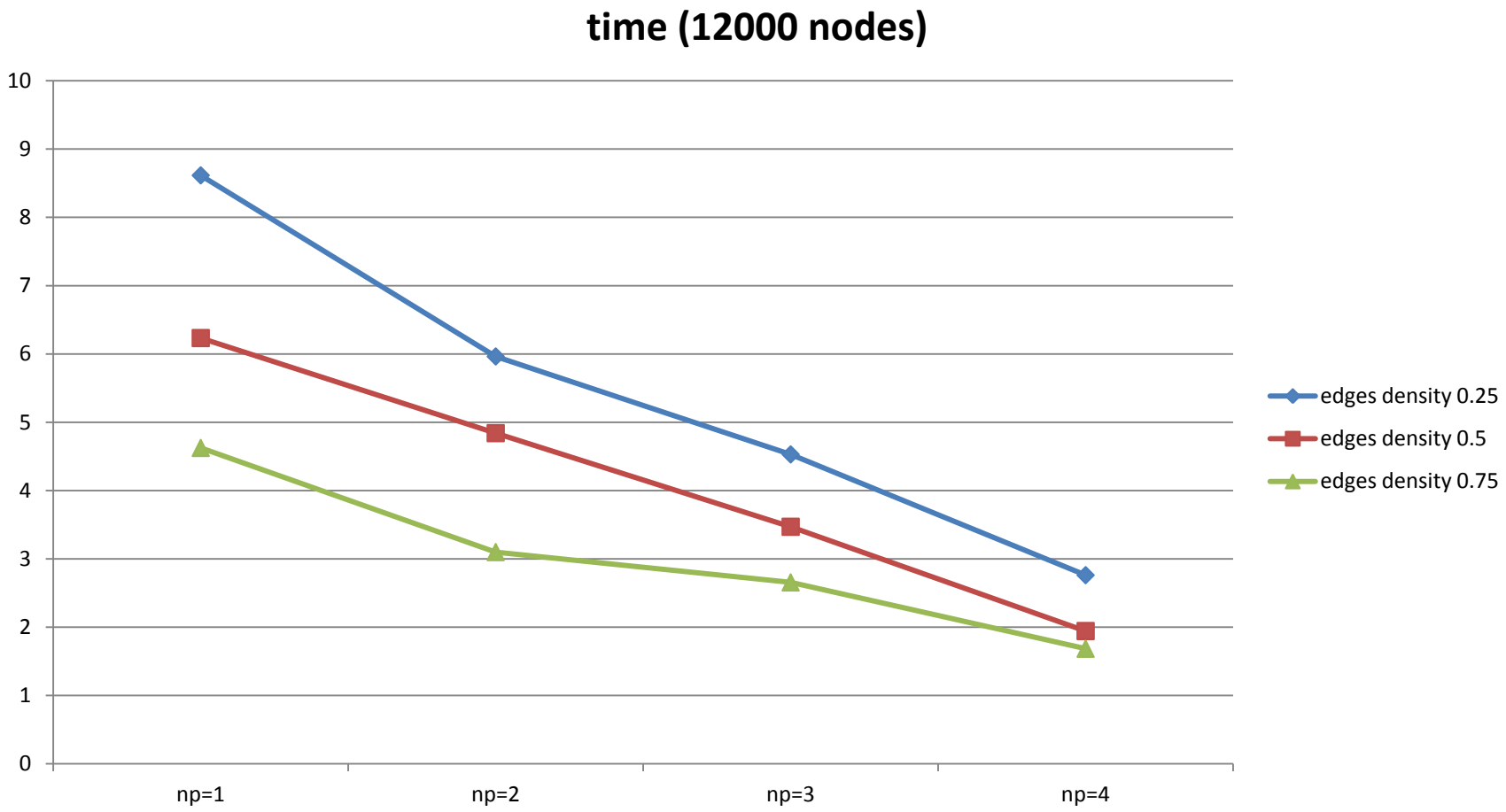
Αποτελέσματα



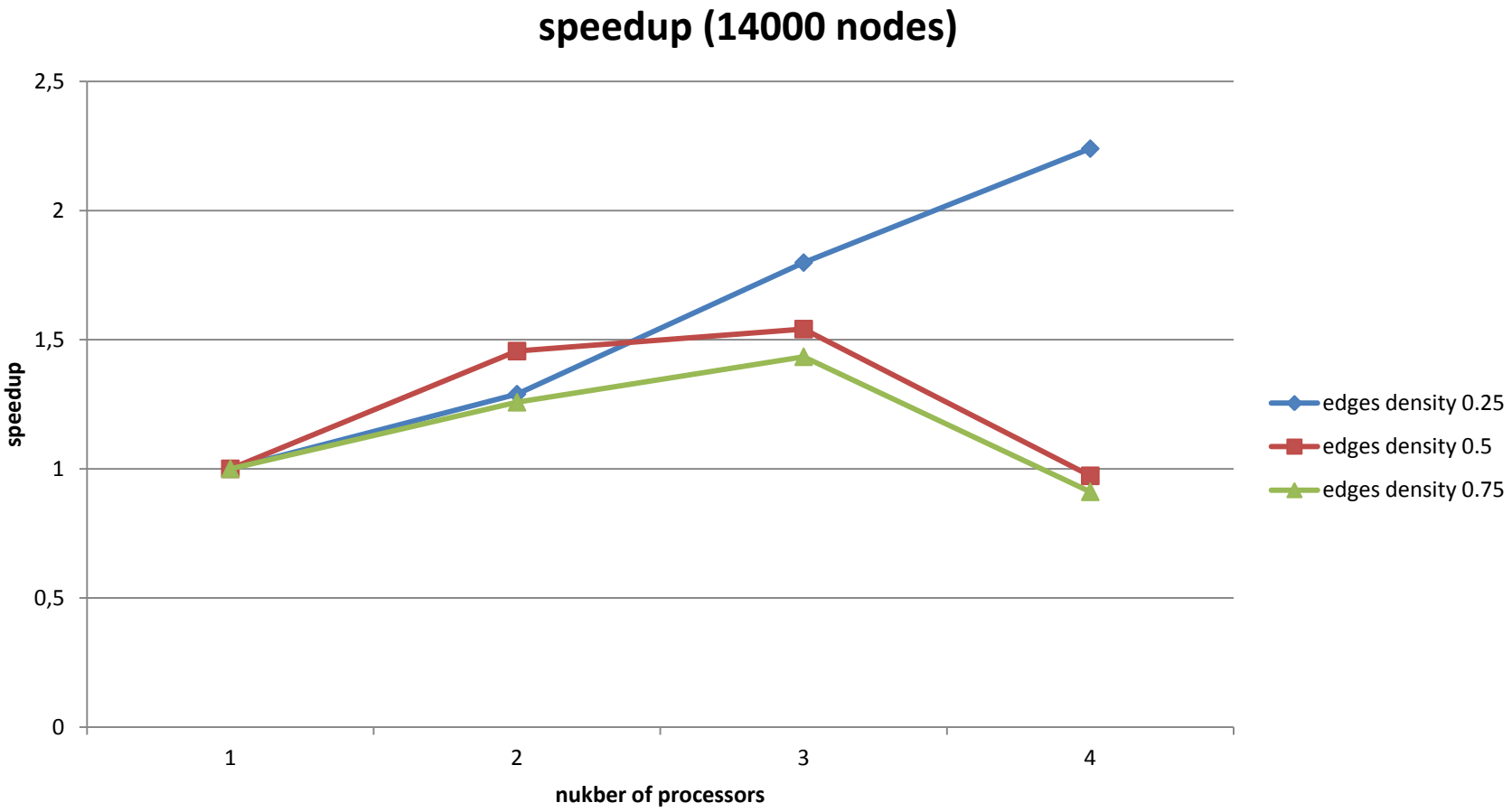
Αποτελέσματα



Αποτελέσματα



Αποτελέσματα



Αποτελέσματα